

Segmentación en Imágenes 3D utilizando Dimensión Fractal de Autocorrelación Local

Andrea Silvetti y Claudio Delrieux

Instituto de Investigaciones en Ingeniería Eléctrica - IIIE (UNS-CONICET) Departamento de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras — Universidad Nacional del Sur - Avda. Alem 1253 - Bahía Blanca - Argentina — claudio@acm.org*

Resumen

Presentamos un método eficiente y robusto para computar la dimensión fractal local (DFL) de autocorrelación o coeficiente H de Hurst en imágenes 3D. El mismo es una variante al modelo que se utiliza para medir la DFL en señales e imágenes digitales. En el caso de imágenes tridimensionales, la autocorrelación local evalúa, dentro de una ventana volumétrica, la máxima variación de los valores presentes en los voxels en función de su distancia Euclídea al centro de la ventana, siendo el H local la pendiente de la regresión en el espacio log—log de dicha máxima variación en función de la distancia.

En trabajos anteriores se mostró que la evaluación de H en imágenes es mucho más precisa y estable si se utiliza la máxima variación entre *todos* los pixels que están a una distancia dada, y que la utilización de ventanas circulares reduce además el tiempo de cómputo mejorando la calidad. En este trabajo proponemos generalizar estas ideas a 3D, computando la DFL en volúmenes utilizando autocorrelación cúbica. Los resultados obtenidos, tanto en volúmenes sintéticos de datos como con imágenes médicas 3D, son significativamente mejores que con el método clásico, demostrando que la DFL es una alternativa importante para la segmentación en imágenes tridimensionales.

Palabras Clave: SEGMENTACIÓN EN IMÁGENES 3D — DIMENSIÓN FRACTAL DE AUTOCORRELACIÓN — COEFICIENTE DE HURST

*Parcialmente financiado por la SECyT-UNS

1. Segmentación en Imágenes Médicas

Las imágenes médicas en formato digital son muy utilizadas en hospitales y clínicas para la visualización e inspección de estructuras anatómicas y patológicas, planeamiento de cirugías, tratamientos de radioterapia, diagnósticos de enfermedades, detección de tejidos anómalos, etc. Los modelos de adquisición de datos, ya sea tomografía computada (CT), resonancia magnética (MRI), resonancia magnética funcional (fMRI), tomografía computadorizada por emisión de fotón único (SPECT) y tomografía por emisión positrónica (PET), obtienen una serie de imágenes 2D correspondientes a cortes paralelos que requieren un análisis posterior [16, 7].

La responsabilidad asociada a las tareas de diagnóstico a partir del análisis de imágenes médicas es muy alta. Las aplicaciones que actualmente se diseñan siguen una línea de ayuda al profesional que desempeña estos trabajos, y no de sustitución del mismo. La experiencia del profesional encargado de interpretar la imagen es un factor determinante en el diagnóstico final. Normalmente se requiere una curva de aprendizaje larga para que estos profesionales alcancen niveles altos de fiabilidad. Aún así, la detección de lesiones y, en consecuencia, el diagnóstico resulta una tarea compleja por varias razones: la baja calidad de las imágenes, la oclusión de objetos debido a la distancia entre los distintos cortes 2D, lesiones muy pequeñas casi imperceptibles por el ojo humano, cansancio y falta de concentración del profesional, etc. [2].

El recorrido sobre cientos de cortes buscando áreas potencialmente patológicas consume demasiado tiempo, y no siempre es suficiente la información suministrada. Por ejemplo, entre las técnicas de visualización para imágenes médicas tridimensionales podemos citar los métodos de extracción de representaciones geométricas intermedias a partir de secuencias de imágenes 2D paralelas, junto con el rendering de la superficie de la estructura extraída [17]. Dentro de esta categoría podemos citar una técnica que procede en dos etapas [4]. En la primera utiliza algoritmos de recorrido bidimensional para obtener contornos asociados a las regiones de interés en cada corte, y en la segunda obtiene una malla poligonal que conecta los contornos en cortes adyacentes. Esta segunda etapa es propensa a ambigüedades cuando en un corte se presenta un único contorno mientras que en el corte adyacente se presentan dos o más, tal como ocurre en una estructura ramificada. Este problema se agrava más aún cuando aumenta la distancia entre cortes paralelos, lo cual es usual en imágenes médicas dada la anisotropía espacial del muestreo en las modalidades frecuentemente utilizadas.

Una de las tareas más difíciles de lograr y que más tiempo consumen es la localización de características de interés en los datos volumétricos, y la remoción de estructuras innecesarias que ocultan la visualización del área de interés [19]. Para mejorar la eficiencia en el diagnóstico de rutinas clínicas, es necesario sincronizar las visualizaciones 2D por cortes con vistas volumétricas. La generación de vistas 3D significativas es sumamente importante dado que en la mayoría de los casos, las vistas por cortes son muy orientativas para ubicar espacialmente el problema pero no brindan suficiente información contextual. Además, algunas patologías son difícilmente observables en cortes por separado, y sólo se hacen ostensibles

viendo varios cortes en simultáneo, por lo que un algoritmo que contemple estos casos se considera de suma utilidad.

Otras técnicas de segmentación provienen de adaptar métodos genéricos del reconocimiento de patrones 2D, como ser los algoritmos de crecimiento de regiones, la segmentación basada en contornos activos, los métodos supervisados (que utilizan algoritmos de clasificación por reconocimiento de patrones y requieren datos de entrenamiento que son segmentados manualmente), métodos no supervisados (que utilizan algoritmos de agrupamiento como por ejemplo el algoritmo de las K-medias), o el uso de redes neuronales (como clasificadores o como métodos de agrupamiento) [5, 10, 8].

La segmentación genuinamente 3D a partir de un volumen de datos, es decir, que trabaje con varios cortes simultáneamente, es una tarea difícil por varias razones: el tamaño de los datos, la complejidad y variabilidad de órganos anatómicos, los problemas relacionados con la adquisición de las imágenes (muestreo, ruido, bajo contraste) que pueden resultar en estructuras anatómicas con bordes indistinguibles y desconectados, y el requerimiento de la interacción y supervisión del especialista para señalar la estructura a segmentar.

En general, los algoritmos de segmentación son específicos para casos particulares. Hay muchas alternativas propuestas, pero no existe una que cubra todas las necesidades. Por ejemplo, los algoritmos de segmentación que buscan propiedades estructurales de la región a segmentar, requieren técnicas de detección de bordes que fallan si los datos no presentan buen contraste entre regiones diferentes; y que una vez detectadas todas las aristas, es muy difícil correlacionarlas con la región de interés [18]. Las técnicas que combinan operaciones morfológicas como erosión y dilatación sobre los datos, requieren un criterio externo para fijar la cantidad de aplicaciones de dichas operaciones. Además pueden ocasionar pérdida de información relevante o resultados imprecisos [13, 15]. Los enfoques basados en las intensidades de los voxels, como las derivadas de la umbralización adaptativa, se aplican con éxito por ejemplo en la identificación de huesos, pero no para la mayoría de los tejidos que no son diferenciables sólo a partir de la intensidad.

Nuestro objetivo es desarrollar una técnica genérica que resulte adecuada para ser aplicada sobre cualquier volumen de datos, que obtenga resultados confiables, y que no requiera del conocimiento de especialistas para guiar el proceso de segmentación. Desde este punto de vista, la segmentación basada en características fractales locales, en particular, la DFL de autocorrelación, es una técnica prometedora por la robustez que la caracteriza frente a los defectos y alteraciones presentes en la mayor parte de las tecnologías de adquisición de imágenes. La DFL caracteriza en forma adecuada la heterogeneidad geométrica local en el volumen, y su aplicación en procesos de segmentación se realiza en forma totalmente automática (no requiere interacción con el usuario). Las imágenes 3D contienen valores escalares que reflejan el contenido del volumen en función del mecanismo de adquisición de la modalidad (densidad, absorción, etc.). En consecuencia, es difícil asumir que estas imágenes están calibradas. Por lo tanto un método invariante frente a transformaciones de intensidad y/o cambios del rango dinámico resulta especialmente adecuado ante la diversidad de modalidades de adquisición. Lo mismo ocurre con la invariancia frente a transformaciones

afines, particularmente cambios de escala y rotaciones, dado que la geometría de la adquisición muy difícilmente es negociable. La DFL de autocorrelación es uno de los pocos métodos de segmentación invariante frente a estas transformaciones.

En este trabajo mostramos los aspectos teóricos y detalles de implementación de nuestro método de autocorrelación cúbica aplicable a imágenes 3D. Testeamos la validez del mismo tanto con imágenes 3D sintéticas con DF conocida, generadas específicamente para este propósito, así como con datos tomográficos. Presentamos una función transferencia adecuada para visualizar la DFL resaltando las áreas con mayor nivel de detalle, y utilizamos dicha función para hacer un rendering directo por compositing de los resultados del procesamiento mediante un software de visualización de volúmenes de distribución libre.

2. Coeficiente de autocorrelación cúbica

La DF es un exponente que relaciona la autoinvariancia afín o autosimilitud estadística con respecto a cambios de escala [6, 9]. La metodología usual para obtener dicho exponente consiste en realizar el ajuste por regresión en un espacio logarítmico, de alguna magnitud relevante del conjunto, como función inversamente proporcional a la escala de medición de dicha magnitud [12]. Uno de los métodos más usuales para evaluar la DFL en funciones unidimensionales es el exponente de autocorrelación de Hurst (H), que caracteriza a una función $V(r)$ de acuerdo a cómo se puede estimar su máxima variación ΔV dentro de entornos lineales de tamaño Δr decreciente, de manera de obtener un ajuste de la forma $\Delta V \sim (\Delta r)^H$. Es posible mostrar que la dimensión fractal de la función es $D = 2 - H$ con

$$H = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\log(\Delta V)}{\log(\Delta r)} \quad y \quad 0 \leq H \leq 1. \quad (1)$$

Las técnicas para medir la DFL en imágenes 2D están basadas en la determinación del exponente de autocorrelación de la luminancia $V(x, y)$. Para el cómputo de H en un pixel p se evalúa la máxima variación de luminancia ΔV entre dicho pixel y pixels ubicados a distancia r del mismo. El H local es la pendiente de la correlación en un espacio log—log entre ΔV y r , siendo la DFL $D = 3 - H$. Esta idea es la generalización a 2D de un método 1D, y el cómputo de H queda dado por la Ec. 2. es decir que el coeficiente que se obtiene es lineal con respecto a r .

$$H = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\Delta V)}{\log(2\pi r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\Delta V)}{\log(2\pi) + \log(r)}. \quad (2)$$

La máxima variación de la luminancia queda determinada por la máxima diferencia de luminancia $\Delta V = |L_i - L_j|$ entre pares de pixels i, j ubicados dentro de una ventana centrada en el pixel. La elección del conjunto de pares de pixels da lugar a distintas formas de calcular H . En [14] se utilizaron ventanas circulares de radio r , o ventanas cuadradas de lado $2r$,

centradas en el pixel p , y se obtuvo ΔV a partir del conjunto de pares de pixels i, j tales que estén a distancia r . Es decir, cada pixel forma un par con todos los demás pixels del entorno que estén a distancia r , y el H se computa con la correlación realizada sobre áreas cuadradas (o circulares, según el tipo de ventana). Por lo tanto, la regresión que se obtiene proviene de un conjunto de pares de pixels de tamaño *cuadrático* con respecto a r . Se observa que esta autocorrelación cuadrática (rectangular o circular), aún con ventanas pequeñas, genera mediciones más exactas y precisas de la DFL que las obtenidas con autocorrelación “lineal”, y que en el caso de áreas circulares el tiempo de cómputo decrece notoriamente. Además, en dicho trabajo se utilizó distancia norma uno para computar r , con lo cual, dado un mismo tamaño de ventana, se puede obtener un mayor conjunto de distancias r . Ello permitió la obtención de regresiones más estables aún con tamaños pequeños de ventana.

En este trabajo, proponemos aplicar esta misma metodología a imágenes 3D. Se puede estimar el H en cada voxel v de la imagen, y luego computar la DFL del mismo como $D = 4 - H$. En este caso el valor del voxel no representa una luminancia, y por lo tanto hablamos de máxima variación de *datos*, la cual queda determinada por la máxima diferencia de datos $\Delta V = |D_i - D_j|$ entre pares de voxels i y j dentro de una la ventana volumétrica centrada. Nuevamente la elección del conjunto de pares de voxels utilizados, da lugar a distintas formas de calcular H . Es posible proceder sobre esferas de radio r decreciente centradas en el voxel v , para obtener ΔV a partir del conjunto de pares v, j , para todo voxel j del entorno a distancia r de v (voxels sobre la superficie de la esfera). Esta idea sería el método “lineal” (la generalización a 3D del método 1D). También podría procederse computando la DFL por cortes en el volumen de datos, aprovechando que los métodos para computar DFL en imágenes son directamente aplicables. Nuestra propuesta consiste en obtener coeficientes de autocorrelación cúbicos y esféricos trabajando con ventanas volumétricas, y distancias r en norma uno, con lo cual es posible obtener regresiones estables aún con ventanas pequeñas.

Se utilizaron ventanas cúbicas de lado n , o esféricas de diámetro n , con n impar en ambos casos, obteniendo la pendiente de la regresión en espacio logarítmico entre ΔV y r , para valores de r entre 1 y $3 \times (n-3)$ en el caso cúbico y para valores de r entre 1 y $2 \times \max(i+j+k)$ para i, j, k tales que $i^2 + j^2 + k^2 \leq (\lfloor n/2 \rfloor)^2$ en el caso esférico. Así, la correlación entre ΔV y el volumen cúbico vc es

$$H_{3c} = \lim_{vc \rightarrow 0} \frac{\log(\Delta V)}{\log(vc)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\Delta V)}{\log(r^3)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\Delta V)}{3 \log(r)}$$

y la correlación entre ΔV y el volumen esférico ve es

$$H_{3e} = \lim_{ve \rightarrow 0} \frac{\log(\Delta V)}{\log(ve)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\Delta V)}{\log(4/3\pi r^3)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\Delta V)}{\log(4/3\pi) + 3 \log(r)}$$

Por lo tanto, en el espacio logarítmico, tanto H_{3c} como H_{3e} tendrán una pendiente igual a $3H$, dado que en el caso esférico, el término constante en el denominador implica un desplazamiento de todos los puntos sin alterar la pendiente del ajuste. Además, se puede probar que el cómputo de H_{3e} es más rápido e igual de preciso que H_{3c} .

DF de Generación	DFL Observada	DFL_x	DFL_y	DFL_z
3.9	3.6938	2.70	2.70	2.70
3.8	3.6557	2.680	2.672	2.668
3.7	3.6142	2.6466	2.6368	2.6432
3.6	3.5681	2.6190	2.6105	2.6090
3.5	3.4681	2.553	2.562	2.550
3.4	3.4234	2.4985	2.5100	2.5094
3.3	3.3681	2.4807	2.4896	2.4802
3.2	3.1920	2.352	2.449	2.307
3.1	3.1780	2.362	2.328	2.385

Tabla 1: DF utilizada para generar la imagen 3D, DFL promedio observada con Hurst esférico (utilizando ventana de diámetro 7), y promedios de las DFL 2D calculadas con las 64 imágenes en cada uno de los tres ejes.

3. Resultados

3.1. Validación del generador de ejemplos

El método fue testeado tanto con imágenes sintéticas con DF conocida, como con imágenes médicas. En el primer caso, se implementó una generalización del algoritmo de desplazamiento aleatorio del punto medio en 3D, que recibe como parámetro H , $0 \leq H \leq 1$, y genera un volumen con $DF = 4 - H$ [11, 9, 3]. Se testeó el método a partir de nueve imágenes 3D sintéticas de $64 \times 64 \times 64$ generadas con distinta DF. Se procesaron cada una de estas imágenes con ventana esférica de diámetro 7, y se promediaron las DFL estimadas en cada voxel para obtener la DFL observada de cada zona de la imagen 3D. Sobre estas nueve imágenes se realizó un segundo test para validar tanto el método de autocorrelación cúbico, como la confiabilidad del algoritmo de generación de imágenes.

Dado que el fBm se caracteriza por que un *zeroset* (un corte a valor constante) de un conjunto de dimensión D tiene dimensión $D - 1$, contrastamos el generador de fBm 3D con zerosets obtenidos con el método cuadrático. Para esto, se obtuvieron las 64×3 imágenes 2D resultantes de fijar cada una de las 3 dimensiones de la imagen y variar las dos restantes. A dichas imágenes se les aplicó el cómputo de la DFL de autocorrelación cuadrática presentado en [14] con ventana circular de diámetro 7. Finalmente se promediaron las DFL de las 64 imágenes para cada una de las tres dimensiones obteniendo valores DFL_x , DFL_y y DFL_z . Se observa el método cúbico es más preciso que el cuadrático, y que $DFL_x \approx DFL_y \approx DFL_z$, lo cual demuestra la isotropía del método. La Tabla 1 consigna estos resultados.

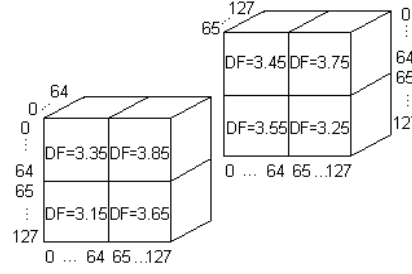


Figura 1: Esquematzación del frente y fondo del volumen sintético generado y las DF en cada parte del volumen.

Sector	DF de generación	DFL Promedio Observada
Frente Sup.Izq.	3.35	3.32347
Frente Sup. Der.	3.85	3.67505
Frente Inf. Izq.	3.15	3.19989
Frente Inf. Der.	3.65	3.59018
Fondo Sup. Izq.	3.45	3.4688
Fondo Sup. Der.	3.75	3.62592
Fondo Inf. Izq.	3.55	3.54682
Fondo Inf. Der.	3.25	3.30597

Tabla 2: DF utilizada en el generado de la imagen tridimensional vs. DF observada con Hurst esférico y ventana de diámetro 7.

3.2. Validación del segmentador

Testeamos el método de autocorrelación esférica como herramienta de segmentación en imágenes 3D, con una nueva imagen 3D sintética y con un volumen de datos tomográficos. En el primer caso, se generó un volumen de $128 \times 128 \times 128$, con ocho partes bien diferenciadas. Cada parte consiste de un volumen de $64 \times 64 \times 64$ generado con diferente DF de autocorrelación como muestra la Fig. 1. Se computó la DFL observada en cada una de estas ocho partes con la misma metodología aplicada a las nueve imágenes de prueba mencionadas en la sección anterior. La Tabla 2 consigna los resultados obtenidos. La Fig. 2 muestra 20 cortes del volumen sintético, y la Fig. 3 muestra el rendering en falso color (con escala variando entre $DF = 3$ (verde) y $DF = 4$ (rojo)) de los mismos cortes extraídos del volumen procesado como se mencionó anteriormente. Se puede observar que la segmentación (en este caso la separación de volúmenes con DFL similar) es satisfactoria.

Finalmente se hicieron distintas visualizaciones a partir de una imagen 3D adquirida por tomografía computada de una cabeza humana cadavérica, y de su procesamiento con los métodos de autocorrelación esférica y de autocorrelación circular aplicado a los distintos cortes de dicha imagen. En todos los casos, la función transferencia elegida respeta el pseudocoloring mencionado anteriormente y utiliza $1 - H_{3e}$ o $1 - H_{2c}$ como opacidad, según el

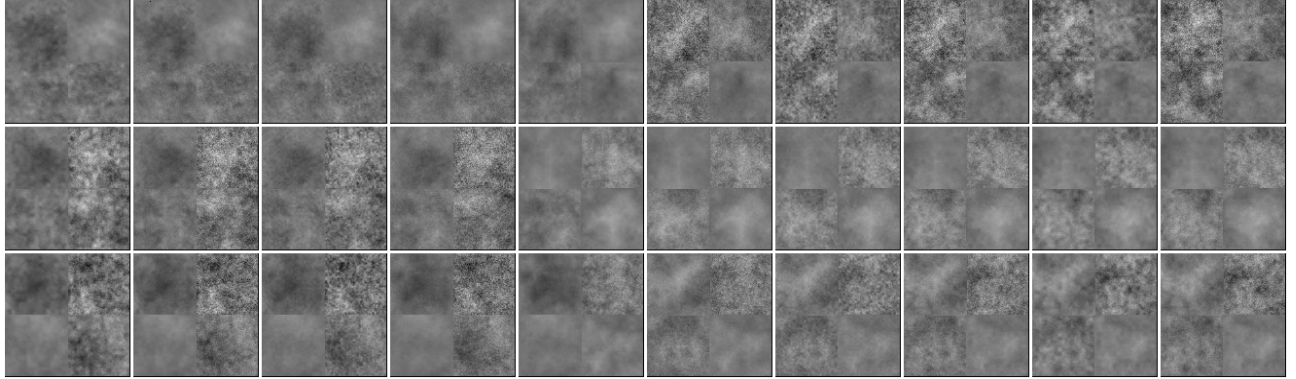


Figura 2: De izquierda a derecha: cortes del volumen sintético en el rango [60..69]. De arriba hacia abajo: cortes según X, Y y Z respectivamente.

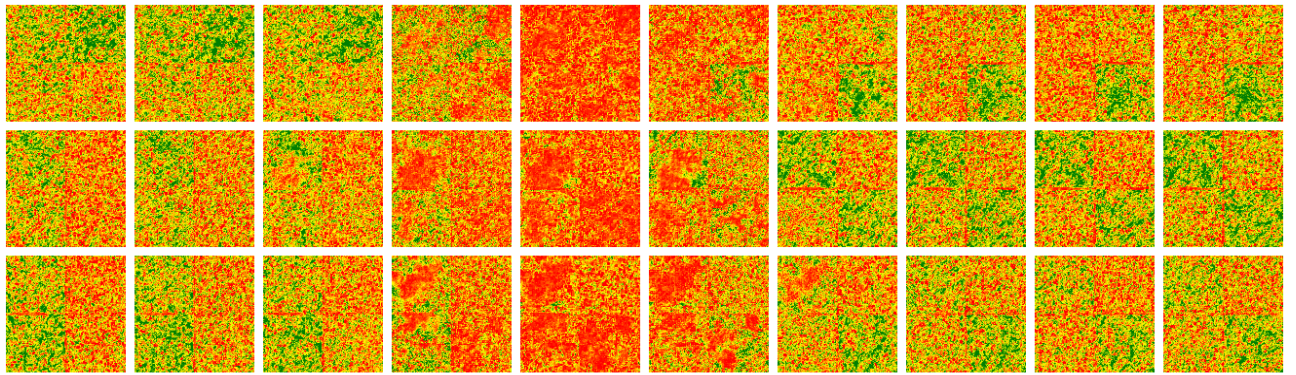


Figura 3: Rendering de los cortes del volumen sintético de la figura 2 procesadas con Hurst esférico con ventana de diámetro 7.

coeficiente de autocorrelación de Hust sea esférico o circular respectivamente. De este modo se logra renderizar con mayor densidad las áreas del volumen con más detalles –mayor DFL– y con más transparencia las áreas con con menor detalle –menor DFL. Se observa que la DFL como descriptor permite segmentar mucho más estructura anatómica de la presente en el volumen de datos que la que es posible visualizar por métodos tradicionales.

Se aplicó el método de autocorrelación esférica con ventana de diámetro 7 a la cabeza humana y se visualizaron los resultados obtenidos de dos maneras distintas. En el primer caso se hizo un rendering directo por compositing del volumen procesado como muestra la parte derecha de la Fig. 4. La parte izquierda de la misma figura, muestra el rendering directo por compositing de la imagen sin procesar. En segundo lugar, se renderizaron cada uno de los cortes extraídos del volumen procesado en cada una de las tres dimensiones. Ver (d), (e) y (f) de la Fig. 6. Por otro lado, se aplicó el método de autocorrelación cuadrática con ventana de diámetro 7 a cada uno de los cortes del volumen de datos originales ($128 \times 128 \times 93$). Los resultados obtenidos fueron renderizados en forma independiente mapeando la DFL de cada corte como se muestra en las imágenes por Hurst Cuadrático de la Fig. 6, y fueron utilizados

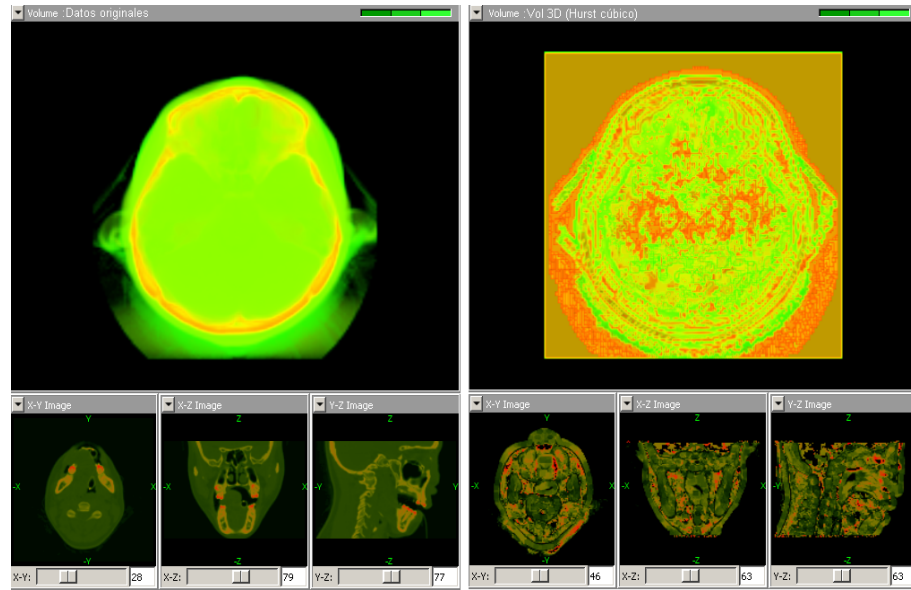


Figura 4: Izquierda: Renderizado con VolView de los datos tomográficos de una cabeza humana. Derecha: renderizado de la DF local de autocorrelación cúbica de los datos.

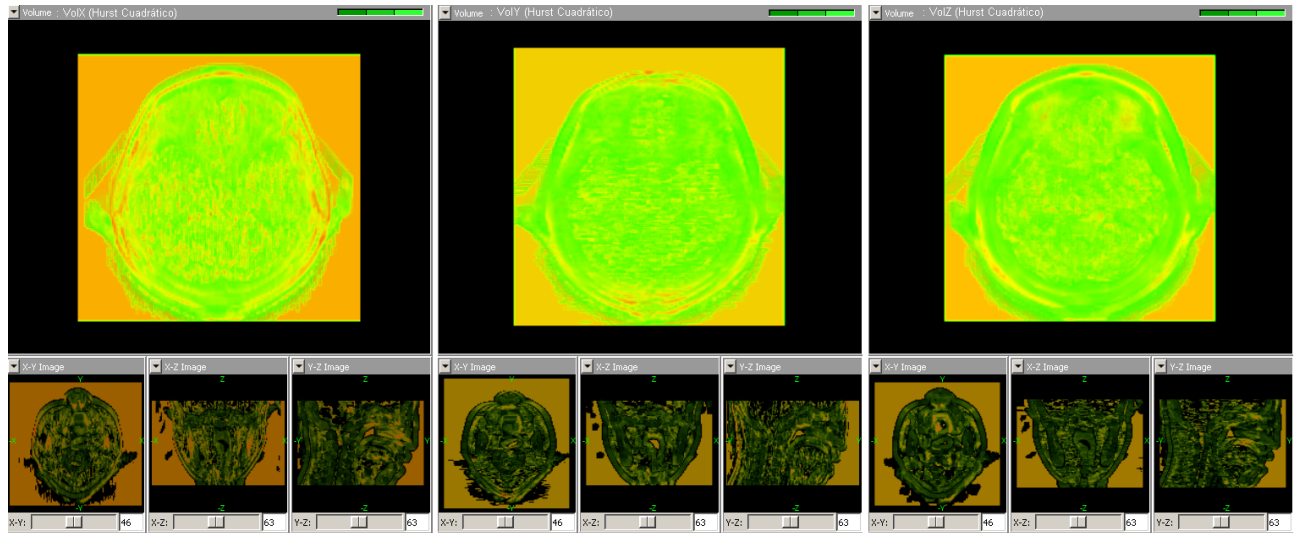


Figura 5: Renderizado con VolView de la cabeza humana procesada con Hurst Cuadrático por cortes según X (izquierda), según Y (centro) y según Z (derecha).

para construir tres nuevos volúmenes de datos (VolX, VolY y VolZ) que fueron visualizados del mismo modo que los resultados del procesamiento en 3D. Ver Fig. 5.

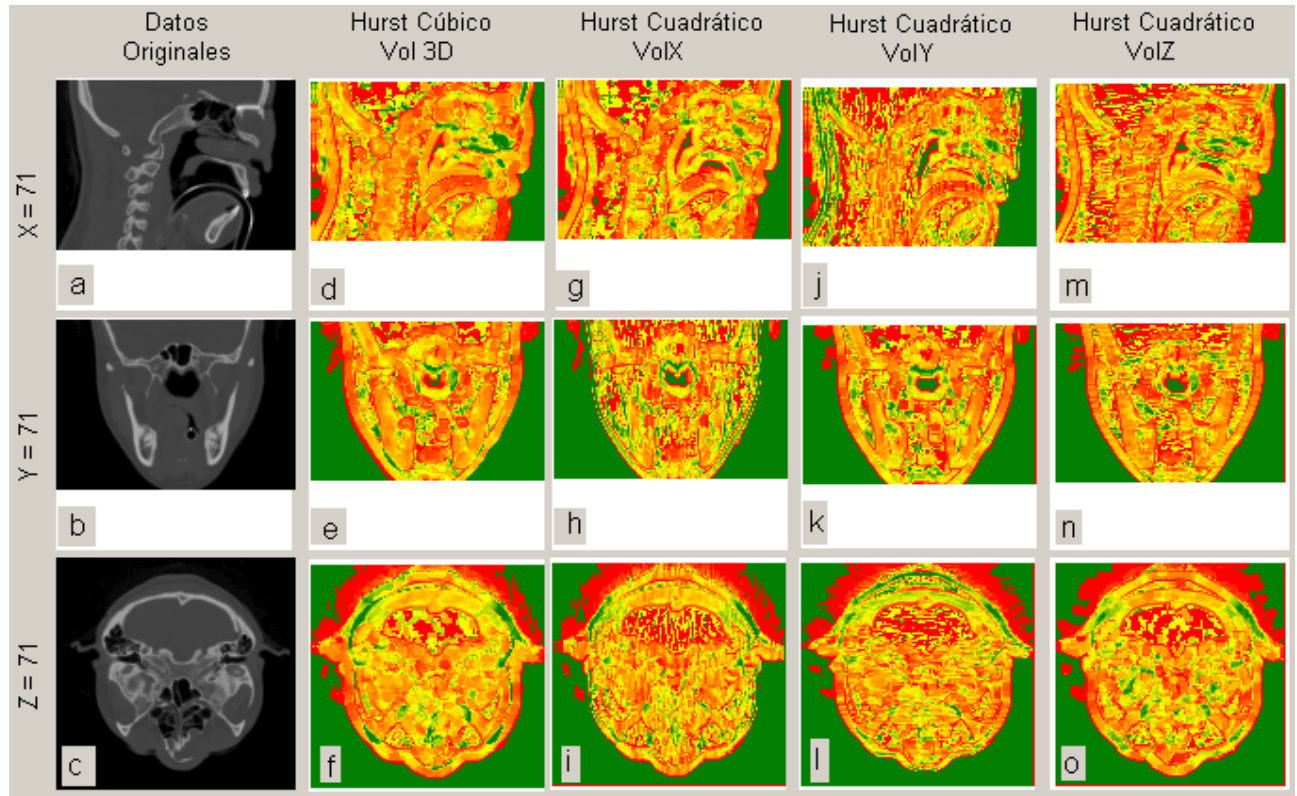


Figura 6: Distintos renderizados para las tajadas X=71, Y=71 y Z=71.

4. Conclusiones y Trabajos Futuros

Se presentó un método para determinar el exponente de autocorrelación cúbico de Hurst en volúmenes. Desde el punto de vista *numérico*, se validó a partir de imágenes 3D con DFL conocida obteniendo resultados satisfactorios. Desde el punto de vista *visual*, se procesaron datos tomográficos de una cabeza humana cadavérica para obtener la DFL de autocorrelación cúbica y cuadrática. Se renderizaron ambos resultados y la comparación de las visualizaciones obtenidas corrobora que el coeficiente de autocorrelación de Hurst cúbico es más adecuado que el cuadrático para ser utilizado como herramienta de segmentación en imágenes médicas.

Las pruebas preliminares realizadas sobre los datos sintéticos concluyen que el método de autocorrelación cúbico es válido como herramienta de medición de la DFL en volúmenes, con mejores resultados en precisión y exactitud que el método cuadrático (el cual, a su vez, es demostradamente mejor que los propuestos en la literatura). Por otra parte, la aplicación de nuestro método sobre datos tomográficos demostró que la DFL como descriptor permite segmentar mucho más estructura anatómica de la presente en el volumen de datos que con otros descriptores basados solamente en los valores escalares de cada voxel. Para mejorar la visualización, es posible aplicar técnicas de separación de volúmenes con DFL similar y luego renderizar la segmentación en forma independiente.

Para renderizar la DF local de autocorrelación cúbica, se utilizó un pseudocoloring con una escala variando entre DF=3(verde) y DF=4(rojo) dando lugar a la visualización de los resultados en forma bidimensional en el caso de las distintos cortes del volumen procesado, y en forma tridimensional por rendering directo por compositing usando el coeficiente de autocorrelación cúbico como transparencia para resaltar las áreas del volumen con mayor detalle.

Como trabajos futuros importantes podemos mencionar, por un lado, la utilización de esta herramienta sobre tomografías computadas de tejidos vivos –no degradados– y en consecuencia imágenes de mejor calidad, para evaluar el segmentador desde el punto de vista médico, y en comparación con otras técnicas conocidas que habitualmente fallan en problemas particulares. Por otro lado, mostrar la robustez del método de medición en base a propiedades que caracterizan a la DF, es decir, demostrar que el método es invariante a transformaciones afines de geometría y modificaciones sobre el rango dinámico de las imágenes 3D. Finalmente, estamos trabajando en la implementación del método basada en GPU (Graphics Processing Unit) para acelerar los tiempos de cómputo.

Referencias

- [1] Volview 2.0, an interactive and intuitive system for volume visualization. kitware inc. <http://www.kitware.com/products/volview.html>.
- [2] R. Llobet Azpitarte, J.C. Pérez Cortés, and R. Paredes Palacios. Técnicas reconocimiento de formas aplicadas al diagnóstico de cáncer asistido por ordenador. *Revista de Salud.com*, 2(7), 2006.
- [3] A. Fournier, D. Fussell, and L. Carpenter. Computer Rendering of Stochastic Models. *Communications of the ACM*, 25(6):371–384, 1982.
- [4] S. Ganapathy and T. Dennehy. A New General Triangulation Method for Planar Contours. *ACM Computer Graphics*, 16(3):69–75, 1983.
- [5] R. M. Haralick and L. G. Shapiro. Survey: Image segmentation techniques. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 29:100–132, 1985.
- [6] B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman, New York, 1983.
- [7] Yamashiro P. Fractal Analysis of MRI. Technical Report Medical Sciences Lab., University of Washington, Seattle, 1997.
- [8] N.R. Pal and S.K. Pal. A review on image segmentation techniques. *Pattern Recognition*, 26(9):1277–1294, 1993.
- [9] H.-O. Peitgen and D. Saupe. *The Science of Fractal Images*. Springer-Verlag, New York, 1986.

- [10] D. L. Pham, C. Xu, and J. L. Prince. A Survey of Current Methods In Medical Image Segmentation. Technical report, Johns Hopkins University, Baltimore, 1998.
- [11] J. C. Russ. *Fractal Surfaces*. Plenum Press, New York, 1994.
- [12] J. C. Russ. *The Image Processing Handbook*. CRC Press, Boca Raton, FL, third edition, 1999.
- [13] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, 1982.
- [14] A. Silveti and C. Delrieux. Dimensión Fractal de Autocorrelación Cuadrática en Imágenes Digitales. In *XII Congreso Argentino de Ciencias de la Computación*, Corrientes y Resistencia, Argentina, 2007. CACIC, .
- [15] P. Soille. *Morphological image analysis*. Springer-Verlag, 1999.
- [16] Cai W., Walter S., and Karangelis G. and Sakas G. Collaborative virtual simulation environment for radiotherapy treatment planning. *Computer Graphics Forum*, 19:379–390(12), September 2000.
- [17] Alan Watt and Mark Watt. *Advanced Animation and Rendering Techniques*. Addison-Wesley, London, 1992.
- [18] Xu, Chenyang, Pham, Dzung L., Prince, and Jerry L. *Current Methods in Medical Image Segmentation*. *Annual Review of Biomedical Engineering*, vol. 2,. Annual Reviews Inc., Palo Alto, 2000.
- [19] Cho Zang-Hee, Jones Joie P., and Singh Manbir. *Foundations of medical imaging*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1993.